Polarization change of moduli of vector bundles on surface

山田, 紀美子

代数幾何学シンポジウム記録
2000年度 pp.182-188

POLARIZATION CHANGE OF MODULI OF VECTOR BUNDLES ON SURFACE

山田 紀美子 (KIMIKO YAMADA)、京都大・理学部

ABSTRACT. We think about the polarization change of moduli $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ of rank-two H-μ-stable vector bundles with chern classes (c_1, c_2) over a surface with $p_g > 0$. We see that, if c_2 is sufficiently large, then there is a polarization $L = L(c_1, c_2)$ such that $\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$ behaves like a "Core" among moduli schemes $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$, where H runs over the set of all polarizations of X.

1. 導入

X は $\mathbb{C}$ 上非特異な射影的曲面、H は X 上の ample line bundle (以下 polarization と呼ぶ) とする。すると $(c_1, c_2) \in \mathrm{Pic}\, X \times \mathbb{Z}$ に対し、X 上の H-μ-stable な rank-two ベクトル束で Chern 類が (c_1, c_2) であるものの粗モジュライ $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ が存在する。一般に polarization H が変わればモジュライ $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ の構造は変わるが、どのように変わるかというのがこのレポートの話題である。異なる二つの polarizaion H, H' があったときにそれぞれの与えるモジュライ $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$, $\mathfrak{M}_{H'}(c_1, c_2)$ の構造を比較することで、既に興味深い仕事がなされている。たとえば c_2 が H, H' に対して十分大きければ $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$, $\mathfrak{M}_{H'}(c_1, c_2)$ は互いに双有理同値になる ([8])、あるいは $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ から $\mathfrak{M}_{H'}(c_1, c_2)$ へは Thaddeus 型の flip を介して変化する ([6])、など。一方このレポートでは, H が poralization の集合全体を走ったときベクトル束のモジュライ $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ 達がどう振舞うかを考える。この問題は次のように言いかえることができる: 各 poralization H に対して $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ は X 上の simple sheaf のモジュライ Spl_X に埋め込むことができるが、この部分集合達 $\left\{\mathfrak{M}_H(c_1, c_2) \,\middle|\, H : \mathrm{ample}\right\}$ が Spl_X の中でどのように振舞うか。

このレポートの主定理を述べる。

定理 1.1. X について (1)、(2) のうちいずれかが成り立つとする：

(1) $p_g(X) > 0$。
(2) X は小平次元が *1* である *relatively minimal* な楕円曲面である。そして $f \in \mathrm{NS}(X)$ を *fiber class* とすると $c_1 \cdot f$ が奇数である。

この時、c_2 が c_1 に対して十分大きければ、ある *polarization* $L = L(c_1, c_2)$ があって次を満たす：$\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$ は既約であり、任意の *polarization* H に対し $\mathfrak{M}_L(c_1, c_2) \cap \mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ は *nonempty* となる。

標語的に言えば、この $\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$ は Spl_X の部分集合達 $\left\{\mathfrak{M}_H(c_1, c_2) \,\middle|\, H : \mathrm{ample}\right\}$ の中で「核」のように振舞う。このレポートでは、2 節以下で証明のあらすじを述べ、最後の 5 節でいくつかの注意を述べる。

2. 準備：AMPLE CONE の中の WALL 構造

ベクトル束のモジュライの polarization change を調べるときによく使われる wall の概念について復習をする。詳しいことは [9] や [6] などを参照されたい。

定義 2.1. (c_1, c_2) は固定しておく。$\mathrm{Num}(X)$ は $\mathrm{Pic}(X)$ を numerically equivalence $(\sim)$ で割った空間を、$\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Num}(X) \otimes \mathbb{R}$ は X の ample cone を指すものとする。

(1) $\eta \in \mathrm{Num}(X) \setminus \{0\}$ に対して W^η を $\left\{D \in \mathrm{Amp}(X) \,\middle|\, D \cdot \eta = 0\right\}$ と定義する。

(2) 集合 $W(c_1, c_2)$ を

$$\left\{ W^\eta \neq \emptyset \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ある polarization } H \text{ と、Chern 類が } (c_1, c_2) \text{ である } H\text{-}\mu\text{-stable な} \\ \text{rank-two sheaf } E \text{ と、rank が } 1 \text{ である } E \text{ の subsheaf } F \\ \text{があって、} \eta \sim 2c_1(F) - c_1(E) \not\sim 0. \end{array} \right\}$$

と定義する。$W(c_1, c_2)$ の元 W を (c_1, c_2) 型の wall と呼ぶ。

(3) (c_1, c_2) 型 wall を定める $\eta \in \mathrm{Num}(X)$ に対し $E_\eta(c_1, c_2)$ を、Chern 類が (c_1, c_2) である rank-two ベクトル束 V で、$2F - c_1 \sim \eta$ を満たす divisor F と l.c.i. zero-dimensional subscheme $Z \subset X$ のイデアル I_Z を用いて

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(F) \longrightarrow V \longrightarrow \mathcal{O}(c_1 - F) \otimes I_Z \longrightarrow 0 \tag{1}$$

という形の自明でない完全列で表すことができるもの全体をパラメトライズする scheme とする。

polarization H が $\mathrm{Amp}(X)$ の中を動くとき, $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ の構造が変わるのは、H が (c_1, c_2) 型の wall を通過する時だけである。

定理 2.2 ([9]). *X 上の polarization L_+, L_- の間を通る (c_1, c_2) 型の wall は W_0 一つだけとし、$L_\pm$ を含む (c_1, c_2) 型の wall は存在しないとする。この時、set-theoretically に*

$$\mathfrak{M}_{L_-}(c_1, c_2) = \left(\mathfrak{M}_{L_+}(c_1, c_2) - \coprod_\eta E_{(-\eta)}(c_1, c_2)\right) \coprod \left(\coprod_\eta E_\eta(c_1, c_2)\right)$$

が成り立つ。ここで η は $W^\eta = W_0$ であり $\eta \cdot L_+ < 0$ である $\eta \in \mathrm{Num}(X)$ 全体を走る。

なお、定理 2.2 の中で $L_\pm$ が満たす条件は十分一般的であることが次の命題からわかる。

命題 2.3. 集合 $W(c_1, c_2)$ は $\mathrm{Amp}(X)$ の中で局所有限である。

Proof. [3, Chapter II] 及び [6, Section 1] を参照。 □

3. 主定理の証明：$p_g(X) > 0$ の場合

この節では $p_g(X) > 0$ であると仮定する。まず $\mathrm{Amp}(X)$ の中のコンパクトな部分集合 $\mathcal{K}$ を、$\mathrm{Int}\,\mathcal{K}$ が nonempty になるように取って固定しておく。この時次の事実が成り立つ。

命題 3.1. *c_2 が c_1 及び $\mathcal{K}$ に対して十分大きければ、$\mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{K}$ に含まれる任意の polarization H に対して $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ は nonempty かつ既約であり、互いに双有理同値である。*

命題3.1が成り立つように、c_2を十分大きく取って固定しておく。次に(c_1, c_2)に対しpolarization $L = L(c_1, c_2)$を$\mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{K}$に含まれて$(c_1, c_2)$型wallには含まれないように取る。命題2.3よりそのようなLは本当にある。一方、$p_g > 0$であるからnonzero section $\theta \in H^0(K_X)$が存在する。c_2が$(\theta, c_1, \mathcal{K})$に対して十分大きければこのpolarization $L = L(c_1, c_2)$が主定理1.1の状況を満たすことを、二つの場合に分けて証明する。

記号．L-Gieseker-semistableなX上のrank-two sheafでChern類が(c_1, c_2)になるもののS-同値類の粗モジュライ$M_L(c_1, c_2)$は$\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$を開集合として含む。$\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$の$M_L(c_1, c_2)$における閉包を$\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$と表して、reduced subschemeと思うことにする。一般に$M_L(c_1, c_2)$は$\mathbb{C}$上射影的であるから、$\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$も$\mathbb{C}$上射影的である。また、$L$の取り方より$\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$はintegralである。このschemeのdesingularization $\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$を一つ固定しておく。最後に、$X$上のcoherent sheaf Fとline bundle Lに対し、trace map $H^i(tr): \operatorname{Ext}^i(F, F(L)) \to H^i(L)$のkernelを$\operatorname{Ext}^i(F, F(L))^0$で表す。

Case 3.1. $\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$の$\mathbb{C}$-valued point ϕがいつでもL-Gieseker-stable sheafに対応している場合。

この場合は, $\theta \in H^0(K_X)$が与える$\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$上のtwo-formを用いて$\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$の双有理的な構造を調べる。

Case 3.1が成り立つ場合、$\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$のétale covering $\left\{V_i \to \overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)\right\}_i$を適当に取れば、$V_i \times X$上にはmoduliのuniversal sheaf $\mathcal{F}'_i$が存在する。すると$\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$上にもétale covering $\left\{U_i \to \tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)\right\}_i$があって、$U_i \times X$上には（universal sheaf $\mathcal{F}'_i$をpullbackして得られる）sheaf $\mathcal{F}_i$が存在する。[7]及び[10]によれば、sheafたち$\{\mathcal{F}_i\}$とK_Xのsection θを用いて、$\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$上にtwo-form Θ_θを構成することができる。このtwo-formは次のような性質を持つ：smooth point $E \in \mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$（desingularizationを考えているので）に対し、

$$\Theta_\theta \otimes k(E):\ T_E\, \tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2) = T_E\, \mathfrak{M}_L(c_1, c_2) \longrightarrow T_E\, \mathfrak{M}_L(c_1, c_2)^\vee \tag{2}$$

は

$$\otimes\, \theta:\ \operatorname{Ext}^1(E, E)^0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E, E(K_X))^0$$

に等しい。今、(2)のkernelの次元を評価したい。そこで次の完全列に注意する。

$$\operatorname{Hom}_D(E|_D, E(K_X)|_D) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(E, E) \xrightarrow{\otimes\theta} \operatorname{Ext}^1(E, E(K_X)). \tag{3}$$

ここでDはθの与えるXのdivisorである。

補題 3.2. c_2が$(\theta, c_1, \mathcal{K})$に対して十分大きければ$c_2$に依存しない定数$p_1 = p_1(\theta, c_1, \mathcal{K})$があって$\dim \operatorname{Hom}_D(E|_D, E(K_X)|_D)^0 \le p_1$.

Proof. この補題はDonaldsonのgeneric smoothness theorem [1]と、モジュライの変形理論を用いて証明される。証明は例えば[5, lemma 3.5]を参照されたい。 □

補題3.2と完全列(3)を用いれば、次の補題が簡単に証明できる。

補題 3.3. c_2 に依存しない数 $p_2 = p_2(\theta, c_1, \mathcal{K})$ があって、c_2 が $(\theta, c_1, \mathcal{K})$ に対して十分大きければ、*two-form* $\Theta_\theta = \Theta_\theta(c_1, c_2)$ は

$$\bigwedge^{[\dim \tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1,c_2)/2]-p_2} \Theta_\theta \neq 0$$

を満たす。特に

$$h^{2[\dim \tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1,c_2)/2]-2p_2,0}(\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)) \neq 0.$$

今、$L = L(c_1, c_2)$ は定理 1.1 の状況を満たしていないと仮定する。

補題 3.4. $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ の既約成分 $\mathcal{M}$ は、ある *polarization* H' に対して $\mathcal{M} \cap \mathfrak{M}_{H'}(c_1, c_2) = \emptyset$ を満たすとする。すると $\mathcal{M}$ の *reduction* $\mathcal{M}_{red}$ は $Y \times \mathbb{P}^l$ に双有理同値である。ここで Y は $\dim Y < 2c_2 - (c_1^2/2) + q(X)$ を満たす *variety* 。

Proof. $\mathcal{M}$ は既約だから、定理 2.2 によれば、(c_1, c_2) 型の nonempty wall を与える適当な numerical class η があって、$\mathcal{M}_{red}$ は $E_\eta(c_1, c_2)$ に双有理同値になる。$c_2 + (\eta^2 - c_1^2)/4$ を $l_\eta(c_1, c_2)$ で表すことにすると、morphism

$$\varphi: \ E_\eta(c_1, c_2) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Hilb}^{l_\eta(c_1,c_2)}(X)$$

を

$$\begin{pmatrix} \text{完全列 (1) で} \\ \text{与えられるベクトル束 } V \end{pmatrix} \longmapsto (F, Z)$$

で定めると well-defined であり、φ のファイバーは $\mathbb{P}\left(\mathrm{Ext}^1_X\left(\mathcal{O}(c_1 - F) \otimes I_Z, \mathcal{O}(F)\right)^\vee\right)$ の開集合である。補題 3.4 はコホモロジー群の base change theorem を用いれば示すことができる。 □

L は定理 1.1 の状況を満たしていないのだから、$\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$ は補題 3.4 に挙げられた条件を満たす variety $Y \times \mathbb{P}^l$ に双有理同値になる。$h^{N,0}(M)$ は smooth complete variety M に対して birationally invariant であるから、

$$h^{N,0}(\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)) = h^{N,0}(Y \times \mathbb{P}^l) = h^{N,0}(Y)$$

が成り立つ。ゆえに

$$h^{N,0}(\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)) \neq 0 \Longrightarrow N \leq 2c_2 - (c_1^2/2) + q(X). \tag{4}$$

一方、補題 3.3 より、c_2 が十分大きければ

$$h^{2[\dim \mathfrak{M}_L(c_1,c_2)/2]-2p_2,0}(\tilde{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)) \neq 0.$$

(4) より、

$$2[\dim \mathfrak{M}_L(c_1, c_2)/2] - 2p_2 \leq 2c_2 - (c_1^2/2) + q(X). \tag{5}$$

一般に $\dim \mathfrak{M}_L(c_1, c_2) \geq 4c_2 - c_1^2 - 3\chi(\mathcal{O}_X)$ なので、(5) に代入して整理すれば

$$2c_2 \leq (c_1^2/2) + 3\chi(\mathcal{O}_X) + q(X) + 2p_2(\theta, c_1, \mathcal{K})$$

が成立しなくてはならない。ゆえに、c_2 が $(\theta, c_1, \mathcal{K})$ に対して十分大きければ L は定理 1.1 の状況を満たさねばならない。

Case 3.2. $\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$ のある $\mathbb{C}$-valued point ϕ が L-Gieseker-stable でない sheaf の S-同値類を与える場合。

この場合は、任意の polarization H に対して H-μ-stable な sheaf のなす $\mathfrak{M}_L(c_1,c_2)$ の部分集合 $U_H^{\mu\text{-}s}$ が nonempty であることを、$\mathfrak{M}_L(c_1,c_2)$ が既約であることを用いて直接示す。但し、「H-μ-stable な sheaf のなす $\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1,c_2)$ の部分集合」は定義できない（注意 3.7 参照）ので、$\mathfrak{M}_L(c_1,c_2)$ の上ではなくて Quot-scheme の上で考える。

Gieseker-semistable sheaf のモジュライの構成法（[4]）によれば、Quot-scheme $\mathrm{Quot}_{\mathcal{O}_X^R/X}(2,c_1,c_2)$ （R は適当な整数）の適当な open subscheme Q^{ss} があって、$G=\mathrm{PGL}(R,\mathbb{C})$ が作用していて、その作用による good quotient $Q^{ss}//G$ が構成できて、$Q^{ss}//G$ が rank-two Gieseker-semistable sheaf の粗モジュライ $M_L(c_1,c_2)$ になる。$Q^{\mu\text{-}s}\subset Q^{ss}$ を、L-μ-stable で locally free な quotient sheaf のなす open subscheme とし、その Q^{ss} での閉包を $\overline{Q}^{\mu\text{-}s}$ と表して reduced subscheme の構造を入れておく。この scheme について次が成り立つ。

補題 3.5. (1) $\overline{Q}^{\mu\text{-}s}$ は既約である。

(2) *L-Gieseker-stable でない quotient sheaf E_ϕ を与える $\mathbb{C}$-valued point $\phi\in\overline{Q}^{\mu\text{-}s}$ が存在する。このような ϕ については、勝手な polarization H に対して E_ϕ が H-μ-semistable になる。*

Proof. $\overline{Q}^{\mu\text{-}s}$ の既約性は、$\mathfrak{M}_L(c_1,c_2)$ が既約であることを用いて証明する。補題 3.5 で主張したような point ϕ の存在は、Case 3.2 での仮定を思い出して証明する。(2) の後半を証明する。E_ϕ は L-Gieseker-stable でないのだから、rank が 1 である sheaf F_1, F_2 があって $c_1(F_1)\cdot L=c_1(F_2)\cdot L$ かつ $\mathrm{gr}_L(E_\phi)=F_1\oplus F_2$ が成り立つ。このような ϕ に対して E_ϕ が H-μ-semistable でなかったとする。$\eta\in\mathrm{Num}(X)$ を $\eta=c_1(F_1)-c_1(F_2)$ とおくと、$L\cdot\eta=0$ かつ $H\cdot\eta\neq 0$ であり、従って W^η が L を含む (c_1,c_2) 型の wall であることが容易に確かめられる。これは L の取り方に矛盾する。 □

H を勝手な polarization とし、H-μ-semistable でもある quotient sheaf たちのなす Q^{ss} の open subscheme を U_H^{ss} とおくと、補題 3.5 より $\overline{Q}^{\mu\text{-}s}\cap U_H^{ss}\neq\emptyset$ である。$Q^{\mu\text{-}s}$ は $\overline{Q}^{\mu\text{-}s}$ の中で dense だから

$$Q^{\mu\text{-}s}\cap U_H^{ss}\neq\emptyset. \tag{6}$$

補題 3.6. *H-μ-stable でもあるベクトル束 $E\in\mathfrak{M}_L(c_1,c_2)$ が存在する。*

Proof. H が (c_1,c_2) 型の wall に含まれていない場合をまず考える。(6) より H-μ-semistable でもあるベクトル束 $E\in\mathfrak{M}_L(c_1,c_2)$ が存在する。もしも E が H-μ-stable でなかったら、E の sub line bundle$F$ で $2c_1(E)\cdot H=c_1(F)\cdot H$ なるものがある。$\eta=2c_1(E)-c_1(F)$ は $\eta\cdot H=0$ かつ $\eta\cdot L\neq 0$ を満たす（$\eta\cdot L=0$ だと E は L-μ-stable でなくなるから）。よって W^η は H を含む (c_1,c_2) 型の wall になる。これは矛盾。次に、H が (c_1,c_2) 型 wall に含まれる場合を考える。定理 2.2 や命題 2.3 より、(c_1,c_2) 型 wall に含まれぬ polarization たち $L_1,\dots,L_n$ があって

$$Q^{\mu\text{-}s}\cap U_H^{\mu\text{-}s}\supset Q^{\mu\text{-}s}\cap U_{L_1}^{\mu\text{-}s}\cap\cdots\cap U_{L_n}^{\mu\text{-}s}$$

を満たすことが確かめられる。前半より $Q^{\mu\text{-}s}\cap U_{L_i}^{\mu\text{-}s}\neq\emptyset$ が各 $1\le i\le n$ に対して成り立つ。補題 3.5 より $Q^{\mu\text{-}s}$ は既約であるから、右辺の集合も nonempty でなくてはならない。 □

補題 3.6 より Case 3.2 の場合に定理 1.1 が成り立つことがただちに従う。

注意 3.7. 証明を $\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$ 上ではなくて Quot-scheme 上で与えたのは、「H-μ-stable な sheaf のなす $\overline{\mathfrak{M}}_L(c_1, c_2)$ の部分集合が定義できないからである。もう少し正確に言うと、ベクトル束たち E_1, E_2 が S-同値すなわち $\mathrm{gr}_L(E_1) \simeq \mathrm{gr}_L(E_2)$ だとしても「E_1 が H-μ-stable $\Leftrightarrow$ E_2 が H-μ-stable」は一般に成り立たない。

4. 主定理の証明：X が楕円曲面の場合

この節では、X は relatively minimal な楕円曲面で $\kappa(X) = 1$ とする。さらに、fiber class $f \in \mathrm{NS}(X)$ に対して $c_1 \cdot f = b$ が奇数であるとする。

$\overline{c_1} \in \mathrm{NS}(X)$ を $c_1 \in \mathrm{Pic}(X)$ の algebraically equivalence class とする。polarization H に対し、$\mathfrak{M}_H(\overline{c_1}, c_2)$ を X 上の rank-two H-μ-stable vector bundle E で $\overline{c_1}(E) = \overline{c_1}$ かつ $c_2(E) = c_2$ なるものの粗モジュライとする。次に、$(c_1, c_2) \in \mathrm{Pic}(X) \times \mathbb{Z}$ を固定しておき、$H_f \in \mathrm{Amp}(X)$ は (c_1, c_2)-suitable な polarization（[2, Lemma2.3] 参照）とする。乱暴な言い方をすれば、$\mathrm{Amp}(X)$ の中で (c_1, c_2) に対して十分 K_X に近い polarization のことである。今の場合、定理 1.1 が $L(c_1, c_2) = H_f$ に対して成立することを証明するのであるが、そのためには、勝手な polarization H に対して

$$\mathfrak{M}_{H_f}(\overline{c_1}, c_2) \cap \mathfrak{M}_H(\overline{c_1}, c_2) \neq \emptyset \tag{7}$$

であることを証明すれば十分である。$\mathfrak{M}_{H_f}(\overline{c_1}, c_2)$ の双有理的な構造は比較的よく分かっている。[2, Chapter III, Theorem 3.14] によれば次の命題が成り立つ。

命題 4.1. $\mathfrak{M}_{H_f}(\overline{c_1}, c_2)$ は非特異で、$2t = 4c_2 - c_1^2 - 3\chi(\mathcal{O}_X)$ が *nonnegative* ならば $\mathrm{Pic}^0(J^b(X)) \times \mathrm{Hilb}^t(J^b(X))$ に双有理同値。t が *negative* ならば *empty*。

ここで、命題 4.1 に出てくる $J^b(X)$ とは X に付随した Jacobian elliptic surface（[2, III.3] など参照）である。定理 1.1 を証明するには、$\kappa(X) = 1$ の時 $\kappa(J^b(X)) \geq 0$ であることを証明する。すると命題 4.1 より $\mathfrak{M}_{H_f}(\overline{c_1}, c_2)$ の非特異な閉包も小平次元が 0 以上になることが分かる。補題 3.4 を用いれば、c_2 が十分大きい時(7)が成り立つことが証明できる。

5. いくつかの注意

注意 5.1. 定理 1.1 において「c_2 が c_1 に対し十分大きければ」との仮定を外すことはできない。実際、定理 1.1 の (1) を満たす X と $(c_1, c_2) \in \mathrm{Pic}(X) \times \mathbb{Z}$ と polarization たち H_1, H_2 で、次の二つを満たすような例がある（証明は省略する）。

(1) $\mathfrak{M}_{H_i}(c_1, c_2) \neq \emptyset \quad (i = 1,\ 2)$.
(2) $\mathfrak{M}_{H_1}(c_1, c_2) \ \cap\ \mathfrak{M}_{H_2}(c_1, c_2) = \emptyset$.

この時定理 1.1 の状況を満たす polarization $L = L(c_1, c_2)$ は存在しない。実際、そのような L があったら $\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)\ \cap\ \mathfrak{M}_{H_i}(c_1, c_2) \neq \emptyset$ が $i = 1,\ 2$ に対して成立するが、$\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$ は既約だから、

$$\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)\ \cap\ \mathfrak{M}_{H_1}(c_1, c_2)\ \cap\ \mathfrak{M}_{H_2}(c_1, c_2) \neq \emptyset$$

でないといけない。これは (2) に反するので矛盾。

注意 5.2. 定理 1.1 は、「c_2 が十分大きければ、全ての polarization H に対して $\mathfrak{M}_H(c_1, c_2)$ 達は互いに双有理同値」と言うことを意味しているのではない。実際、定理 1.1 の

仮定を満たす曲面 X と $c_1 \in \mathrm{Pic}(X)$ で次を満たすような例がある：どんなに大きな数 N に対してもある整数 $c_2 > N$ があって

$$\sup_{H:ample} \dim \mathfrak{M}_H(c_1, c_2) = +\infty$$

が成り立つ（[11]）。このような面倒な状況が起こるのは、主に ample cone $\mathrm{Amp}(X)$（をスカラー倍で割った空間）がコンパクトでないためである。

注意 5.3. 定理 1.1 と深い関係のある Qin の予想に触れておく。Qin は [8] の中で次のように予想した：

> X, c_1, c_2 は文頭の通りとする。もしも c_2 が c_1 に対して十分大きければ、ある polarization $L = L(c_1, c_2)$ があって、勝手な $\mathfrak{M}_L(c_1, c_2)$ の既約成分 $\mathcal{M}$ と任意の polarization H に対して、H-μ-stable でもあるベクトル束 $E \in \mathcal{M}$ がある。

この予想はある種の ruled surface や $\kappa(X) = 0$ なる極小曲面については正しいことが分かっているが、一般的には未解決である。定理 1.1 はこの予想への部分的な回答でもある。

参考文献

1. S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), no. 3, 257–315.
2. R. Friedman, *Vector bundles and* so(3)*-invariants for elliptic surfaces*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 1, 29–139.
3. R. Friedman and J. W. Morgan, *On the diffeomorphism types of certain algebraic surfaces. I*, J. Differential Geom. **27** (1988), no. 2, 297–369.
4. D. Gieseker, *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), no. 1, 45–60.
5. J. Li, *Kodaira dimension of moduli space of vector bundles on surfaces*, Invent. Math. **115** (1994), no. 1, 1–40.
6. K. Matsuki and R. Wentworth, *Mumford-Thaddeus principle on the moduli space of vector bundles on an algebraic surface*, Internat. J. Math. **8** (1997), no. 1, 97–148.
7. S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface*, Invent. Math. **77** (1984), no. 1, 101–116.
8. Z. Qin, *Birational properties of moduli spaces of stable locally free rank-2 sheaves on algebraic surfaces*, Manuscripta Math. **72** (1991), no. 2, 163–180.
9. ———, *Equivalence classes of polarizations and moduli spaces of sheaves*, J. Differential Geom. **37** (1993), no. 2, 397–415.
10. A. N. Tyurin, *Symplectic structures on the moduli spaces of vector bundles on algebraic surfaces with $p_g > 0$*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52** (1988), no. 4, 813–852, 896.
11. K. Yamada, *A criterion for getting a big component of the moduli of vector bundles by changing a polarization*, to appear.

E-mail address: yamada@kusm.kyoto-u.ac.jp